Méthodes statistiques
Réponses Chapitre 3

Problème 3.1

b) Distribution de la variable X

x	4	5	6	7
$p(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Il est implicite ici que chacun des 10 échantillons possibles a la même probabilité de sélection.

c) i) 0,4 ; ii) 0,5 ; iii) 0,1 ; iv) 0 ; v) 0,2 ; vi) 0 ; vii) 1

d) $\mu = 5{,}6$; $\sigma = 0{,}9165151$.

e) $P(|X - \mu| > 2\sigma) = 0 \Rightarrow P(|X - \mu| > 3\sigma) = 0$; $P(|X - \mu| > \sigma) = 0{,}3$.

Problème 3.2

a) $\mu_X = 2{,}3$; $\mu_Y = 1{,}6$; $\sigma_X = 0{,}9$; $\sigma_Y = 0{,}6633$.

b) $E(2X) = 4{,}6$; $Var(3Y) = 3{,}96$; $E(X + Y) = 3{,}9$; $E(X - Y) = 0{,}7$; $E(2X + 3Y) = 9{,}4$; $E(2X - 3Y) = -0{,}2$

c) Si on admet que les variables sont indépendantes, on a les réponses suivantes :
$Var(X + Y) = 1{,}25$; $Var(X - Y)$ $1{,}25$; $Var(2X - 3Y) = 7{,}2$; $Var(2X + 3Y) = 7{,}2$.

d) L'hypothèse d'indépendance entre les variables X et Y est très peu vraisemblable.

e) L'hypothèse d'indépendance est non seulement vraisemblable, elle est certainement vraie.

Problème 3.3

a) $P(T = 27) = \frac{3}{56}$; $P(T \leq 33) = \frac{16}{56}$; $P(T > 32) = \frac{45}{56}$; $P(T < 51) = \frac{45}{56}$; $P(T \geq 54) = \frac{7}{56}$.

b) $E(T) = 40{,}5$; $Var(T) = 101{,}25$; $\sigma_T = 10{,}0623$. La moyenne de la population est $\mu = 13{,}5$ et sa variance est $\sigma^2 = 47{,}25$.

c) Puisque $\bar{X} = T/3$, $E(\bar{X}) = (1/3)E(T) = 13{,}5$; $Var(\bar{X}) = (1/3)^2 Var(T) = 11{,}25$; $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{11{,}25} = 3{,}354102$.

d) 0,392857.

e) $P(\bar{X} > 39) = 0$; $P(\bar{X} \leq 36) = 1$; $P(\bar{X} - \mu > 2) = 16/56$; $P(\bar{X} - \mu > 2\sigma) = 1/56$; $P(|\bar{X} - \mu| > 2\sigma) = 2/56$.

Problème 3.4

a) $\mu_X = 4$; $\sigma_X \approx 1{,}4142$. b) $E(Y) = 0{,}5$; $\sigma_Y = 0{,}17678$. c) 0,2890625.

Problème 3.5

$E(X) = 5$; $\sigma_X = 0{,}912871$.

Problème 3.6

a) Fonction de probabilité de Z :

z	0	2	4	5	6	7	8	9	10	
$p(z)$	0,0625	0,125	0,1875	0,125	0,125	0,125	0,0625	0,125	0,0625	1

b) $\mu = E(Z) = 5{,}5$. $\sigma = 2{,}715695$.

c) $\mu_X = \mu_Y = 2{,}75$;

d) $Var(X) = Var(Y) = 3{,}6875$.

e) Fonction de probabilité de $U = XY$:

u	0	4	8	10	16	20	25	
$p(u)$	7/16	1/16	2/16	2/16	1/16	2/16	1/16	1

$E(XY) = 7{,}5625$, $E(X)E(Y) = 7{,}5625 \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.

f) Distribution de D :

d	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$p(d)$	0,0625	0,0625	0,0625	0,125	0,0625	0,25	0,0625	0,125	0,0625	0,0625	0,0625

D'où, $E(D) = 0$, et $Var(D) = 7{,}375 \Rightarrow Var(D) = Var(X) + Var(Y)$.

Problème 3.7

Distributions des variables :

X

x	0	2	4	5
$p(x)$	3/12	3/12	3/12	3/12

Y

y	0	2	4	5
$p(y)$	3/12	3/12	3/12	3/12

Z

z	2	4	5	6	7	9
$p(z)$	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12

D

d	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5

$p(d)$	1/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12

U

u	0	8	10	20
$p(u)$	6/12	2/12	2/12	2/12

Débarrassons-nous des calculs une fois pour toutes :

	μ	σ^2
$Z = X + Y$	5,5	4,916667
$D = Y - X$	0,0000	9,833333
$U = XY$	6,333333	53,88889

b) Au numéro précédent, X et Y sont indépendantes alors qu'ici X et Y sont négativement dépendantes.

c) Var(D) = 9,83333, ce qui est supérieur à 7,375, la variance de $X - Y$ dans le numéro précédent. Cela s'explique encore par le fait que X et Y sont ici négativement dépendantes.

d) E(XY) = 6,3333 < E(X)E(Y) = 2,75×2,75 = 7,5625. La propriété E(XY) = E(X)E(Y) n'est pas vérifiée. Elle est vraie lorsque X et Y sont indépendantes — ce qui est le cas au numéro précédent mais pas ici.

Problème 3.8

a) Distribution de $U = XY$:

u	15	18	24	30	40	48	50	60	80	
$p(u)$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1

Distribution de W :

w	4	4,5	5,5	6,5	7	7,5	8	9	
$p(w)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	1

b) E(XY) = 39,5. E(X) = E(Y) = 6,4. ⇒ E(X)E(Y) = 40,96

c) E(W) = 6,4; Var(W) = 2,19. Si on avait effectué les tirages avec remise, on aurait alors Var(W) = 2,92.

Problème 3.9

L'espérance de gain est 25 $.

Problème 3.10

Si vous stationnez illégalement, l'espérance du coût est 6,25 $, moins cher à la longue que le stationnement payant.

Problème 3.11

a) Le gain net X de la compagnie et soit 144, soit –1456

b) Fonction de probabilité de la variable X:

x	144	-1456
$p(x)$	0,98	0,02

c) E(X) = 112; σ_X = 224.

d) Soit Y le gain relatif aux deux personnes. E(Y) = 224. σ_Y = 316,7838.

Problème 3.12

a) E(X) = 2,6; σ_X = 1,28

b) $Y = 50X - 40$

c) E(Y) = 90 ¢ ; σ_Y = 64,03.

d) Fonction de probabilité de Y:

y	-40	10	60	110	160
$p(x) = p(y)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

E(Y) = 90 ¢; Var(Y) = 4100.

e) Le gain moyen est 85 ¢.
Il vaut mieux acheter 4 mangues, puisque l'espérance de gain serait alors de 90¢ >85 ¢.

Problème 3.13

a) E(X) = 300 $; b) σ_X = 402,4922.

Problème 3.14

S'il ne loue pas de machine, son coût a une espérance de 120 $. S'il loue la machine l'espérance sera de 180 $— plus cher. Il ne devrait pas louer la machine.

Problème 3.15

Avec l'offre 1 son gain sera de 800 $. Dans la meilleure des hypothèses, l'offre 2 lui rapportera autant que l'offre 1. Aucune raison d'accepter l'offre 2.

Problème 3.16

Si vous réservez avec la compagnie B, l'espérance du coût sera de 3140 $—plus cher que si vous allez avec A.

Problème 3.17

a) L'espérance du coût est de 5160 $; b) L'écart-type est de 195,9592.

Problème 3.18
Si vous choisissez d'attendre pour voir si une place se libère dans l'avion de la ligne B, l'espérance de votre coût serait 860 $. Ce qui est inférieur au coût de 950 $ que vous paieriez avec A. Il vaut mieux, si vous tolérez le risque, attendre une annulation chez B.
Problème 3.19
Si p est la probabilité de succès (découvrir du pétrole), alors l'espérance de gain est positive si $p > 0{,}2631579$.
Problème 3.20
Si elle l'achète chez BPBQ, son coût sera de 1800 $. Si elle attend, alors l'espérance du coût sera de 1925 $. Il vaut donc mieux acheter la robe tout de suite chez BPBQ à 1800 $.
Problème 3.21
$E(X) = 896$. Si on suppose que les variables sont indépendantes, $\sigma_X = 44{,}9$.
Problème 3.22
Espérance : 672; et Variance : 240.
Problème 3.23
Espérance : 0; Variance : 240.
Problème 3.24
a) Indépendantes; b) Dépendantes; c) Presque sûrement dépendantes.
d) Certainement dépendantes; e) Probablement dépendantes; f) Probablement indépendantes.
g) Dépendantes, à moins que la distribution des poids dans les deux pommiers soit la même.
h) Indépendantes; i) Dépendantes; j) Indépendantes.
k) Indépendantes; l) Dépendantes; m) Dépendantes.
n) Probablement indépendantes; o) Dépendantes; p) Dépendantes.
q) Dépendantes; r) Nettement dépendantes; s) Nettement dépendantes.
t) Dépendantes; u) Dépendantes; v) Dépendantes.
w) Dépendantes.
Problème 3.25
a) $\sigma_X > \sigma_Y$; b) $\sigma_X < \sigma_Y$.; c) $\sigma_X < \sigma_Y$; d) $\sigma_X < \sigma_Y$; e) $\sigma_X > \sigma_Y$; f) $\sigma_X < \sigma_Y$.; g) $\sigma_X > \sigma_Y$.; h) $\sigma_X < \sigma_Y$.;
i) $\sigma_X > \sigma_Y$; j) $\sigma_X < \sigma_Y$.; k) $\sigma_X < \sigma_Y$; l) $\sigma_X < \sigma_Y$; m) $\sigma_X < \sigma_Y$; n) $\sigma_X < \sigma_Y$
Problème 3.26
a) Variance : 91; b) Variance: 0,5292; c) Variance: 0,05.
Problème 3.27
Variance de 100 actions de A : 10000Var(X). Variance de de 50 actions de chaque : 5000Var(X) < 10000Var(X).
Problème 3.28
a) Variance : 25. L'écart-type est 5.
b) La démarche en *a*) est légitime seulement si le temps de service et le temps d'attente sont des variables indépendantes.
Problème 3.29
Variance : 7,77778
Problème 3.30
a) Espérance : 0; écart-type : 2; b) Espérance : 0; Écart-type : 6,324555.
Problème 3.31
L'espérance est nulle si et seulement si A = ¾.
Problème 3.32
a) La variance est nulle; b) Variance : 25; c) Variance : 100.
Problème 3.33
a) Variance : 12250000; b) Variance : 4000000; c) Variance : 25000000.
Problème 3.34
a) Variance : 225; b) Variance : 900; c) Variance : 0; d) Variance : 0.