Méthodes statistiques
Solutions Chapitre 5

Notez bien

- Les calculs effectués ci-dessous peuvent différer des vôtres en raison des erreurs d'arrondis.
- Vous trouverez à la fin de ce document des instructions pour le calcul avec Excel des probabilités normales.

Problème 5.1

a	b	c	d	e	f
0,1112	0,0096	0,091 9	0,658 6	0,95	0,2112

Problème 5.2

a	b	c	d	e	f
0,4991	0,3085	0,3829	0,9974	0,2417	0,6170

Problème 5.3

a	b	c	d	e	f
1,2503	1,0599	0,7501	-2,0792	1,5701	0,9498

Problème 5.4

a	b	c	d	e	f
43,2525	41,5389	38,7508	13,2873	14,1306	8,5484

Problème 5.5 93,26 pouces.

Problème 5.6 309,305 4.

Problème 5.7

a) $P(X \geq 60) \approx P(X^* \geq 59{,}5) = 0{,}2742$.

b) $P(49{,}5 \leq X^* \leq 65{,}5) = 0{,}8181$.

c) $P(X^* \geq 69{,}5) = 0{,}0099$.

d) $P(X^* > 50{,}5) = 0{,}8289$.

Problème 5.8

a) $P(8{,}5 < X^* < 15{,}5) = 0{,}741\,6$.

b) $P(X^* > 7{,}5) = 0{,}926\,5$.

c) $P(X^* > 20{,}5) = 0{,}0031$.

d) $P(X^* < 4{,}5) = 0{,}007\,8$.

Problème 5.9

a) 0,010 7

b) 0,000 9 : plus le lot est bon, moins il y a de chance qu'il soit rejeté.

c) 0,000 8. Nous concluons que p est sûrement supérieure à 0,05.

d) On prendra $X \geq 13$ comme critère de rejet.

Problème 5.10 a) 877 b) 1960 c) 0,1894 d) 846,5 heures.

Problème 5.11 a) 0,6652 b) 0,0630 c) 0,7414 d) 157,8 e) 24,673. f) 165,05 g) $\mu = 175$; $\sigma = 10{,}7296$.

Problème 5.12

On estime μ par $\bar{y} = 77{,}968$ et σ par $s = 3{,}14113$ (l'écart-type corrigé).

On calcule alors les probabilités et les effectifs suivants :

Intervalle	*Probabilité*	*Effectif (sur 10 000)*
$X \leq 71$	0,013267	133
$71 < X \leq 75$	0,172359	1591
$75 < X \leq 79$	0,62875	4564
$79 < X \leq 83$	0,945419	3167
$83 < X \leq 87$	0,997982	526
$87 < X \leq 91$	0,999983	20
$91 < X$	0,013267	0
	1	10 000

Problème 5.13 a) $\mu = 1{,}45$; $\sigma = 1{,}160\,8$. b) 0,45; 0,05. c) 0,3173 et 0,0455.

Problème 5.14 $E(Y) = 1\,740$. $Var(Y) = 1\,940\,400$. $\sigma_Y = 1392{,}98$.

Problème 5.15 Sous l'hypothèse que $\mu = 100$, $P(\bar{X} \geq 100) = 0{,}0008$. On rejette l'hypothèse que $\mu = 100$.

Problème 5.16 0,3228.

Problème 5.17

a) $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(0\,;\,18{,}06667)$.

b) La probabilité $P(|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \geq 20)$ étant extrêmement faible, l'hypothèse que les deux populations sont de même moyenne est intenable.

Problème 5.18 0,0103

Problème 5.19 a) 80 b) 16 c) 0,0043 d) 86 e) 0,058

Problème 5.20 0,1615.

Problème 5.21 0,0485 par l'approximation normale. Probabilité exacte : 0,0510.

Question supplémentaire

Pour chacune des variables aléatoires X suivantes, dites quelle loi pourrait s'appliquer et déterminez E(X) et Var(X). Dites si d'autres lois pourraient également servir approximativement. Justifiez votre ou vos choix, en précisant les hypothèses qu'on doit supposer vraies pour appliquer la loi. Il se peut qu'aucune des lois que vous connaissez ne s'applique.

a) Dans un usine on fait fonctionner 5 machines identiques. La probabilité qu'une de ces machines tombe en panne en un jour donné est 0,15.
X = le nombre de machines qui tombent en panne.
X suit une loi $\mathcal{B}(5 ; 0{,}15)$ et donc E(X) = 5(0,15) = 0,75 et Var(X) = 0,6375. Il est indispensable que les machines fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Il ne faudrait pas, par exemple, qu'une panne dans l'une entraîne ou fasse croître la probabilité d'une panne dans une autre.

b) On tire un échantillon de 10 lentilles cornéennes dans un lot de 10 000 lentilles dont 25 sont défectueuses.
X = le nombre de lentilles défectueuses dans l'échantillon.
Strictement parlant, $X \sim \mathcal{H}(10 ; 25 ; 9975)$ et E(X) = np = 10(25/10 000) = 0,025.

$$\text{Var}(X) = 10\frac{25}{10\,000}\ \frac{9\,975}{10\,000}\ \frac{10\,000-10}{10\,000-1} = 0{,}02493.$$

Mais on peut facilement substituer une loi $\mathcal{B}(10 ; 0{,}0025)$ à la loi hypergéométrique.

c) On fait un relevé de tous les dons offerts à une certaine université en 1999. En moyenne, l'université en question reçoit un don de plus de 10 000 $ par année.
X = le nombre de dons de plus de 10 000 $.
La seule loi qu'on pourrait considérer est la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Dans ce cas, E(X) = 1 et Var(X) = 1. On pourrait raisonner ainsi : il existe un très grand nombre n de donateurs potentiels, chacun avec une faible probabilité p de faire un don de plus de 10 000 $. Le nombre de tels dons est donc de loi $\mathcal{B}(n ; p)$, et puisque n est grand et p petit, la loi binomiale peut être approchée par la loi de Poisson.

d) On observe l'état des 500 autobus qui seront en service demain dans la ville. Les données montrent que sur les 2 000 dernières journées-autobus il y a eu 2 pannes.
X = le nombre d'autobus qui tomberont en panne demain.
On suppose qu'un autobus a une probabilité p = 2/2 000 = 0,001 de tomber en panne en une journée d'opération. Si cette probabilité est la même pour chaque autobus, alors $X \sim \mathcal{B}(500 ; 0{,}001)$ et E(X) = 0,5 et Var(X) = 500(0,001)(0,999) = 0,4995. Étant donné la grande taille de n et la petitesse de p, on peut aussi utiliser la loi de Poisson comme approximation, avec $\lambda = 0{,}5$.

e) On observe les appels reçus dans un bureau entre 13h00 et 16h00 un certain après-midi. Normalement les appels arrivent dans cet intervalle de temps au rythme d'un appel par deux minutes.
X = le nombre d'appels reçus entre 13h00 et 16h00 cet après-midi.
X suit probablement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 90$. Alors E(X) = Var(X) = 90. La loi de Poisson s'appliquerait moins bien si les appels pouvaient avoir un effet l'un sur l'autre. Par exemple, si un appel prolongé empêchait la réception d'autres appels.

f) On observe 25 appels effectués par un vendeur au téléphone. Dans le passé, ce vendeur a réussi en moyenne une vente à chaque 100 appels.
X = le nombre de ventes.
$X \sim \mathcal{B}(25 ; p)$. La probabilité p de réussir une vente en un appel est estimée par son taux habituel de succès, p = 0,01. E(X) = np = 0,25; Var(X) = npq = 25(0,01)(0,99) = 0,2475.

g) On observe une vendeuse au téléphone pendant une journée. Dans le passé, cette vendeuse a réalisé en moyenne 5 ventes par jour.
X = le nombre de ventes.
$X \sim \mathcal{B}(n ; p)$ où n est le nombre d'appels qu'elle fait dans la journée et p est la probabilité de succès en un appel. On ne connaît ni n ni p mais on peut estimer E(X) = np par le nombre moyen de succès, soit E(X) = 5. Si on suppose que le nombre d'appels est élevé et la probabilité de succès en un appel est faible, alors X suit approximativement une loi de Poisson de paramètre λ. On estime λ par la moyenne 5, et alors Var(X) = λ = 5.

h) Vingt-cinq personnes (8 femmes 17 hommes) posent leur candidature à 10 postes identiques.
X = le nombre de femmes parmi les dix personnes engagées.
Si on suppose que la sélection des 10 personnes se fait au hasard, alors $X \sim \mathcal{H}(10 ; 8; 17)$ et E(X) = $10\frac{8}{25}$ = 3,2; Var(X) = 10

$$\frac{8}{25}\ \frac{17}{25}\ \frac{25-10}{25-1} = 1{,}36.$$

L'hypothèse qu'on choisit les candidats au hasard n'est évidemment pas raisonnable en pratique. Mais si on découvre que le nombre de femmes engagées est trop extrême pour admettre l'hypothèse, on peut conclure que la probabilité de sélection n'est pas la même pour les deux sexes. Ce qui demeure incertain, c'est la raison de cette différence, qui n'est pas nécessairement une question de discrimination.

i) Un service d'approvisionnements distribue au hasard 14 ordinateurs, 5 au service A et 9 au service B. Huit des 14 ordinateurs sont neufs.
X = le nombre d'ordinateurs neufs reçus par A.

$X \sim \mathcal{H}(5 ; 8; 6)$. $E(X) = 5\,\frac{8}{14} = 2{,}857$; $\mathrm{Var}(X) = 5\,\frac{8}{14}\,\frac{6}{14}\,\frac{14-5}{14-1} = 0{,}8477$.

j) Un vendeur décide qu'il terminera sa journée dès qu'il aura réussi 4 ventes. La probabilité d'une vente est de 25 % à chaque essai.
X = nombre d'appels qu'il fera pendant la journée.

$X \sim \mathcal{B}^-(4 ; 0{,}25)$. $E(X) = \frac{n}{p} = \frac{4}{0{,}25} = 16$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{nq}{p^2} = \frac{4(0{,}75)}{(0{,}25)^2} = 48$.

k) On tire un échantillon de 100 vis dans un lot de 100 000 vis dont 250 sont défectueuses.
X = le nombre de vis défectueuses dans l'échantillon.

$X \sim \mathcal{H}(100 ; 250; 99\,750)$. $E(X) = 100\,\frac{250}{100\,000} = 0{,}25$; $\mathrm{Var}(X) = 100\,\frac{250}{100\,000}\,\frac{0{,}997\,50}{100\,000}\,\frac{99\,900}{99\,999} = 0{,}249\,128\,1$

Étant donné la taille de la population, on peut employer la loi $\mathcal{B}(100 ; 0{,}002\,5)$. Et puisque n est grand et p petit, on peut aussi employer la loi de Poisson $\mathcal{P}(0{,}25)$. À titre d'illustration, le tableau suivant montre les valeurs de quelques probabilités calculées avec les loi hypergéométrique, binomiale et de Poisson :

Loi	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X \le 2)$
Hypergéométrique	0,778 460 4	0,195 296 7	0,024 155 4	0,997 912 4
Binomiale	0,778 557 0	0,195 127 1	0,024 207 5	0,997 891 6
de Poisson	0,778 800 8	0,194 700 2	0,024 337 5	0,997 838 5

ℓ) On tire un échantillon de 100 adultes d'une population de 100 000 adultes dont 30 000 sont au chômage.
X = le nombre d'adultes au chômage dans l'échantillon.

$X \sim \mathcal{H}(100 ; 30\,000 ; 70\,000)$. $E(X) = 100\,\frac{30\,000}{100\,000} = 30$; $\mathrm{Var}(X) = 100\,\frac{30\,000}{100\,000}\,\frac{70\,000}{100\,000}\,\frac{100\,000-100}{100\,000-1} = 20{,}979\,2$.

La taille de la population étant très importante comparée à la taille de l'échantillon, on peut utiliser la loi $\mathcal{B}(100 ; 0{,}3)$, auquel cas on calculerait la variance comme $100\,\frac{30\,000}{100\,000}\,\frac{70\,000}{100\,000} = 21$.

Finalement, il est possible aussi d'utiliser l'approximation normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ où $\mu = 30$ et $\sigma^2 = 20{,}979\,2$. À titre d'illustration, le tableau suivant montre les valeurs de quelques probabilités calculées avec les loi hypergéométrique, binomiale et normale :

Loi	$P(X \le 20)$	$P(X \le 30)$	$P(X \le 35)$	$P(X \le 40)$
Hypergéométrique	0,016 420 9	0,549 136 6	0,884 036 6	0,987 539 1
Binomiale	0,016 462 9	0,549 123 6	0,883 921 4	0,987 501 6
Normale	0,019 035 1	0,543 463 5	0,885 084 2	0,985 491 7

m) Un interviewer engagé par une maison de sondages frappe à des portes jusqu'à ce qu'il atteigne son quota de 100 ménages francophones. Supposons que 10 % des ménages sont francophones.
X = le nombre de portes auxquelles il aura frappé.
$X \sim \mathcal{B}^-(100 ; 0{,}10)$. Donc $E(X) = n/p = 100/0{,}1 = 1\,000$; et $\mathrm{Var}(X) = nq/p^2 = 100(0{,}9)/(0{,}1)^2 = 9\,000$.

n) On observe les arrivées au service d'urgence d'un hôpital un lundi après-midi. On sait que les lundis après-midi il y a en moyenne 25 arrivées durant la période de 13h00 à 17h00.
X = le nombre d'arrivées un lundi de 13h00 à 13h30.
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda = 25/8$. $E(X) = \mathrm{Var}(X) = 25/8 = 3{,}125$.

o) On tire un échantillon de 5 oranges dans une caisse de 590 oranges dont 8 sont gâtées.
X = le nombre d'oranges gâtées dans l'échantillon.
$X \sim \mathcal{H}(5 ; 8 ; 582)$; $\mathrm{Var}(X) = 5\left(\frac{8}{590}\right)\left(\frac{592}{590}\right)\left(\frac{590-5}{590-1}\right)$

p) Un vendeur décide qu'il terminera sa journée dès qu'il aura réussi une vente. La probabilité d'une vente est de 25 % à chaque essai.
X = le nombre de jours parmi les 5 jours de la semaine prochaine où il fera plus de 10 essais.

$X \sim \mathcal{B}^{-}(5\ ;\ (0{,}75)^{10})$.

q) Le nombre d'erreurs dans une page est une variable de loi de Poisson (à peu près) de moyenne $\mu = 0{,}5$.
X = le nombre de pages sans erreur parmi les 100 premières pages.
$X \sim \mathcal{B}(100\ ;\ e^{-0{,}5})$; $\mathrm{Var}(X) = 100e^{-0{,}5}(1-; e^{-0{,}5)}$

r) Le nombre d'erreurs dans une page est une variable de loi de Poisson de moyenne $\lambda = 0{,}5$. On vérifie les pages une à une en commençant par la page 1.
X = le numéro de la première page dans laquelle on trouve une erreur.
$X \sim \mathcal{G}(p)$ où p est la probabilité de trouver une erreur dans une page. On suppose qu'on trouvera un erreur dans une page si et seulement si il y en a au moins une. Par conséquent $p = 1 - e^{-0{,}5} = 0{,}393\ 47$. $\mathrm{E}(X) = 2{,}541\ 5$ et $\mathrm{Var}(X) = 3{,}917\ 7$.

Commandes Excel
Loi normale

Soit *X* une variable de loi normale de moyenne 75 et d'écart-type 8. Les commandes ci-dessous montrent comment calculer P($X \leq 78{,}25$) et comment déterminer le nombre *a* tel que P($X \leq a$) = 0,65.