# Méthodes statistiques
## Solutions Chapitre 11

Note La « valeur *p* » est présentée dans plusieurs de ces solutions; c'est la probabilité (sous l'hypothèse nulle) d'obtenir une valeur de $\chi^2$ aussi grande que celle que vous avez obtenue. Par exemple, au numéro 11.1 ci-dessous, la statistique $\chi^2$ suit, sous l'hypothèse nulle, une loi khi-deux à 11 degrés de liberté. La valeur observée est $\chi^2$ = 1,58. Alors la valeur *p* est la probabilité $P(\chi^2_{11} \geq 1{,}50)$ —la probabilité qu'une variable de loi $\chi^2$ à 11 degrés de liberté prenne une valeur supérieure ou égale à 1,50. Cette probabilité est égale à 99,95 %. On l'obtient avec Excel de cette manière :


### Problème 11.1

a) La valeur de khi-deux est 1,58, ce qui, à 11 degrés de liberté (point critique : 19,675), est très loin d'être significatif. La valeur *p* est 99,95 %. On peut aisément attribuer les différences au hasard.

b) La valeur obtenue est en fait significativement *petite*, ce qui fait soupçonner qu'on a joué avec les données.

### Problème 11.2

a) $\chi^2 = 71{,}947$; $\nu = 6$; point critique: 12,59. On conclut avec confiance que les suicides ne sont pas aussi fréquents tous les jours de la semaine.

b) Un test d'ajustement donne $\chi^2 = 51{,}06$; $\nu = 1$; point critique: 3,84 ($p \approx 0$). On conclut que les suicides sont plus probables en semaine.

c) Un test d'uniformité donne $\chi^2 = 1{,}96$; $\nu = 3$; point critique: 7,82 ($p = 0{,}58$). On ne peut pas rejeter l'hypothèse que les quatre jours de la semaine ont la même probabilité de provoquer un suicide.

d) On fait un test d'uniformité donne $\chi^2 = 20{,}9$; $\nu = 2$; point critique: 5,99. On peut rejeter l'hypothèse que les trois jours du week-end ont la même probabilité de provoquer un suicide.

e) Donc en définitive, on peut dire que les jours de la semaine provoquent plus de suicides que le week-end ; que les jours de la semaine sont comparables entre eux; alors que les jours du week-end sont différents les uns des autres.

### Problème 11.3

Le modèle est le suivant : nous observons 3 séries de variables aléatoires, *X*, *Y* et *Z*. Dans l'ordre dans lequel les observations sont disposées dans le tableau, ce sont:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Grande | $X_1$ | $Y_1$ | $Z_1$ | 170 |
| Faible | $X_2$ | $Y_2$ | $Z_2$ | 179 |

Désignons par $p_1$, $p_2$ les probabilités de grande et de faible mobilité dans le premier groupe; par $r_1$ et $r_2$ les probabilités correspondantes dans le deuxième groupe; et par $s_1$ et $s_2$ les probabilités correspondantes dans le troisième

$H_o$ : la couleur de la peau n'influence pas la mobilité professionnelle, et donc que

$$p_1 = r_1 = s_1;\ \text{et}\ p_2 = r_2 = s_2$$

On estime ces deux probabilités communes par 170/349 = 0,4871 et 179/349 = 0,5129, respectivement. Ce qui donne, pour les 94 sujets de peau pâle, les effectifs théoriques (0,4871)(94) = 45,79; et (0,5129)(94) = 48,21. On obtient de cette manière, le tableau des effectifs théoriques suivants:

| Mobilité | Pâle | Moyenne | Brune | Total |
|---|---|---|---|---|
| Grande | 45,79 | 85,24 | 38,97 | 170 |
| Faible | 48,21 | 89,76 | 41,03 | 179 |
| Total | 94 | 175 | 80 | 349 |

$\chi^2 = 12{,}23$; $\nu = 2$; point critique: 5,99. Puisque 12,23 > 5,99 ($p = 0{,}0022$), on rejette l'hypothèse que la couleur de la peau n'influence pas la mobilité professionnelle, pour conclure que la couleur de la peau a un lien avec la mobilité professionnelle.

Pour avoir une idée du type de relation qu'il pourrait y avoir, on calcule les distributions conditionnelles:

| | Pâle | Moyenne | Brune | Total |
|---|---|---|---|---|
| Grande | 37,2% | 48,0% | 63,8% | 48,7% |
| Faible | 62,8% | 52,0% | 36,3% | 51,3% |
| Total | 100% | 100% | 100% | 100% |

Il semblerait que plus la peau est foncée, plus la mobilité est grande.

### Problème 11.4

$\chi^2 = 0{,}84$ à 3 degrés de liberté. Le point critique est 7,815 ($p = 0{,}839$). On n'a pas de raison de croire qu'il y a une différence entre filles et garçons dans les motifs d'absence.

## Problème 11.5

a) Voici les pourcentages de personnes avec une forte estime de soi, par religion:

| Protestants | Catholiques | Juifs |
|---|---|---|
| 69,7% | 66,7% | 77,5% |

Assez semblables pour les Protestants et Catholiques.

b) $\chi^2 = 22{,}59$; $\nu = 2$; point critique: 5,99 ($p = 0{,}0000124$). On conclut que l'estime de soi dépend bel et bien de la religion.

c) $\chi^2 = 3{,}34$; $\nu = 1$; point critique: 3,84 ($p = 0{,}0676$). On ne peut pas conclure qu'il y a une différence entre Protestants et Catholiques.

d) $\chi^2 = 19{,}17$; $\nu = 1$; point critique: 3,84 ($p = 0{,}000012$). On conclut que les Juifs ont une estime de soi différente des Catholiques ou Protestants.

e) Il n'y a pas de différence entre Catholiques et Protestants. Mais il y en a une entre Protestants et Catholiques d'une part, et Juifs d'autre part: une plus forte estime de soi parmi ces derniers.

## Problème 11.6

Il ne semble pas y avoir de différence entre les religions, contrairement aux résultats du numéro précédent, dans lequel la conclusion était que les Juifs avaient une estime de soi supérieure à celle des autres. Mais les effectifs ici sont moins importants, ce qui rend plus difficile la détection des différences.

## Problème 11.7

$\chi^2 = 50$; $\nu = 3$; c'est très significatif, puisque le point critique est 7,81 ($p \approx 0$). On peut affirmer avec confiance qu'il y a un défaut dans le mode de tirage.

## Problème 11.8

Pour les variables Astro et Singe, nous avons éliminé tous les cas où au moins l'une des deux questions n'obtient pas de réponse (réponse 5). Pour la variable Astro, nous groupons les réponses 1 et 2 (essentiellement ceux qui ne croient pas à l'astrologie) ainsi que les réponses 3 et 4. Pour la question Singe, nous groupons les réponses 3 et 4, soit ceux qui ne croient pas trop à l'évolution des espèces.
$\chi^2 = 6{,}53$; $\nu = 2$; point critique : 5.99; valeur $p$ : 0,038. À 5%, la relation est significative : L'hypothèse suggérée par les distributions conditionnelles semble confirmées.

## Problème 11.9

Après élimination des non-réponses, nous groupons les réponses 1, 2 et 3 à la question Paume. Ce sont donc ceux qui ne nient pas catégoriquement la signification de la ligne de vie. Les réponses à la variable Astro sont groupées comme au numéro précédent. Voici la distribution observées :
Distributions conditionnelles:

| Paume | Astro « L'astrologie est une ânerie» | | |
|---|---|---|---|
| « La ligne de vie nous dit … » | 1 ou 2 | 3 ou 4 | Total |
| 1, 2 ou 3 | 40,7 | 59,3 | 100 |
| 4 | 63,6 | 36,4 | 100 |

Une certaine dépendance semble se manifester: ceux qui rejettent la signification de la ligne de vie on plus tendance à rejeter l'astrologie. Mais la dépendance est faible et pourrait ne pas être significative.
$\chi^2 = 3{,}127706$; $\nu = 1$; point critique à 95 % : 3,84; valeur $p$ : 0,077. La dépendance n'est donc pas significative à 5 %. On aurait conclu à une dépendance si on avait fixé un niveau de 10 %.

## Problème 11.10

Les réponses 1, 2 et 3 de la variable Egl sont groupées. Ce sont ceux qui vont à l'église au moins occasionnellement. De même, on regroupe les valeurs 1, 2 et 3 de la variable Rel. Ce sont ceux qui ont au moins une certaine hésitation à épouser une personne d'une autre religion. $\chi^2 = 0{,}0478$; $\nu = 1$; point critique à 95 % : 3,84; valeur $p$ : 0,827. La dépendance que présente l'échantillon peut facilement être attribuée au hasard.

## Problème 11.11

Voici une modélisation correcte. On observe deux variables :

$X =$ Nombre de sujets déclarés schizophrènes parmi les vrais schizophrènes
$Y =$ Nombre de sujets déclarés schizophrènes parmi les non schizophrènes

$X \sim \mathcal{B}(n_1, ; p_1)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2 ; p_2)$, où $n_1 = 40$ et $n_2 = 10$.

$H_o : p_1 = p_2$. Les effectifs théoriques sont identiques aux effectifs observés, la valeur de $\chi^2$ est 0, et évidemment on ne peut pas rejeter l'hypothèse d'indépendance : on conclut que le psychologue ne peut *pas* détecter la schizophrénie par l'EEG.

## Problème 11.12

a) $\chi^2 = 0{,}05$; $\nu = 1$; point critique: 3,84 ($p = 0{,}823$). Nous ne pouvons pas conclure que la proportion des gens qui sont capables de répondre à la première question est différente de 50%.

b) $H_o$ : la probabilité de réussir la question 2 ne dépend pas du résultat de la question 1.
$\chi^2 = 6{,}75$; $\nu = 1$; point critique: 3,84 ($p = 0{,}00935$). On peut conclure que la réussite dans l'une entraîne une plus forte probabilité de réussite dans l'autre.

### Problème 11.13
On a $\chi^2 = 1{,}53$, $\nu = 1$. Le point critique étant 3,84 ($p = 0{,}216$), on ne peut pas conclure qu'il y une différence entre hommes et femmes quant à leur vulnérabilité à la maladie en question.
Le deuxième chercheur observe trouve $\chi^2 = 4$, $\nu = 1$; point critique : 3,84 ($p = 0{,}0455$). Là on conclut qu'il y a une différence entre hommes et femmes. La raison pour laquelle on a pu faire un test avec moins d'information, c'est qu'on a utilisé une donnée supposée connue : qu'il y a 50% de femmes dans la population.

### Problème 11.14
Dans chacune des universités le taux d'admission des hommes est inférieur à celui des femmes alors que globalement il est inférieur. Mais les femmes sont très nombreuses à faire des demandes à l'université A, et celle-ci a un très bas taux d'acceptation. (Ces données illustrent un paradoxe connu sous le nom de *Paradoxe de Simpson*).

### Problème 11.15
$\chi^2 = 77{,}17$; $\nu = 9$; point critique à 95 % : 16,92; valeur $p$ : $5{,}87\times10^{-13}$. La dépendance est nette et claire.

### Problème 11.16
b) $\chi^2$ est 22,15, certainement significatif à 5% ($p \approx 0$).
c) $\chi^2 = 3{,}19$; $n = 1$; point critique à 5% : 3,84, on ne rejette pas l'hypothèse ($p = 0{,}074$).
d) $\chi^2 = 4332$; $\nu = 3$; point critique: 7,814 ($p \approx 0$ ). La tendance à épouser une coreligionnaire dépend très certainement de la religion. Les distributions conditionnelles montrent, entre autres, que le pourcentage de mariages à des coreligionnaires est beaucoup plus élevé chez les catholiques; particulièrement faible chez les Anglicans et les Baptistes. La très grande valeur de $\chi^2$ reflète, bien sûr, la forte dépendance entre la religion de l'époux et la tendance à épouser une coreligionnaire. Mais elle est aussi l'effet de l'importance de l'imposante taille de l'échantillon, ce qui permet de rejeter l'hypothèse avec beaucoup d'assurance.

### Problème 11.17
a) $\chi^2 = 17{,}71$; $\nu = 4$; point critique: 9,488 ($p = 0{,}0014$). On peut donc conclure que l'attitude face à l'avortement dépend de la scolarité. Les distributions conditionnelles montrent, essentiellement, que l'attitude face à l'avortement est plus tolérante à mesure que l'éducation augmente.

b) $\chi^2 = 4{,}76$; $\nu = 4$; point critique: 9,488 ($p = 0{,}312$). Nous ne pouvons pas conclure que, pour les Catholiques, l'attitude face à l'avortement dépend de la scolarité.

Pour les protestants : $\chi^2 = 16{,}82$; $\nu = 4$; point critique: 9,488 ($p = 0{,}002$). On peut conclure que, pour les Protestants, l'attitude face à l'avortement dépend de la scolarité. Il ne faut pas, cependant, conclure trop vite que chez les Catholiques, l'attitude et la scolarité sont indépendantes: il se peut que l'incapacité de rejeter l'hypothèse ne soit due qu'à un effectif total insuffisant.

### Problème 11.18
a) Voici une modélisation possible. On observe deux variables :

$X =$ Nombre de filles parmi ceux qui voulaient une fille

$Y =$ Nombre de filles parmi ceux qui voulaient un garçon

$X \sim \mathcal{B}(n_1, ; p_1)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2 ; p_2)$, où $n_1 = 22$ et $n_2 = 26$. L'hypothèse à tester est que la méthode utilisée n'est pas efficace. Il y a plusieurs façons d'exprimer cette hypothèse mathématiquement :
L'une est $H_o : p_1 = p_2$. $\chi^2 = 26{,}9$, $\nu = 1$. On conclut que la probabilité d'avoir une fille est bien supérieure chez ceux qui veulent une fille. La méthode semble donc avoir un effet ($p \approx 0$).

b) Soit $Z$ le nombre de couples qui ont réussi à avoir ce qu'ils voulaient. $Z \sim \mathcal{B}(n ; p)$, où $n = 48$. On teste l'hypothèse que $p = ½$. On trouve $\chi^2 = 27$, $\nu = 1$;point critique : 3,84 ($p \approx 0$). On rejette encore. En posant $Z \sim \mathcal{B}(n ; p)$, on a fait la supposition – comme partie du modèle – que les 48 épreuves ont toutes la même probabilité de succès. Or $Z$ est une somme de deux variables de loi binomiale dont les probabilités pourraient être différentes. Dans ce cas la conclusion tirée pourrait plus facilement être erronée.

### Problème 11.19
$\chi^2 = 0{,}986$; $\nu = 1$; point critique à 95 % : 3,84; valeur $p$ : 0,321. Donc il n'y a pas de différence significative.
Le statisticien B détermine un intervalle de confiance pour le nombre moyen $\mu$ de pièces défectueuses par boîte. Intervalle de confiance pour la moyenne du nouveau procédé : [1,54 ; 2,24]. Nous ne pouvons affirmer que le nouveau procédé est différent de l'ancien.
La méthode utilisée par le statisticien A n'est pas valide, car elle traite les 10 000 observations comme indépendantes et de même taux de défectuosité, ce qui pourrait ne pas être le cas.

### Problème 11.21
On remarque une plus grande importance attachée à la couleur chez les femmes. Reste à savoir si les différences sont significatives.
$\chi^2 = 5{,}26$; $\nu = 3$; point critique : 7,81; valeur $p = 0{,}154$. Les différences entre hommes et femmes réelles peuvent raisonnablement être attribuées au hasard.

### Problème 11.22
On remarque que le stationnement semble préoccuper les femmes plus que les hommes. $\chi 2 = 32{,}7$; $\nu = 3$; point critique = 7,8 ; valeur $p$ = 0,00000036. Les différences sont certainement significatives.

### Problème 11.23
On remarque que la climatisation est plus importante pour les femmes que pour les hommes. $\chi 2 = 12{,}198$; $\nu = 3$; point critique = 7,81; valeur $p = 0{,}0067$. La différence entre hommes et femmes n'est pas due au hasard.
*Remarque* Il appert, si on se fie aux trois derniers numéros, que tout est plus important pour les femmes que pour les hommes.

### Problème 11.24
$\chi^2 = 19{,}30$; $\nu = 3$; point critique : 7,81; valeur $p$ : 0,000237.

### Problème 11.25
$\chi 2 = 7{,}31$; $\nu = 3$; point critique : 7,81; valeur $p = 0{,}0626$.

### Problème 11.26
$\chi^2 = 131{,}06$; $p \approx 0$. Ce qui rend le résultat fortement significatif, c'est la grande taille de l'échantillon. La conclusion est non pas que la différence est énorme, mais qu'on est *sûr* qu'il y a bien une différence.

### Problème 11.27
$\chi^2 = 130{,}386$; $\nu = 5$; $p \approx 0$.

### Problème 11.28
a) i) $\chi^2 = 11{,}73146$; point critique : 3,84. Valeur $p$ : 0,00061. On rejette $H_o$.
ii) Les valeurs de $\chi^2$ sont 1,106 et 12,366; valeurs $p$ correspondantes = 0,575 et 0,00206. Donc non significatif dans le groupe témoin et significatif chez les patients. Globalement, $\chi^2 = 13{,}47199$; valeur $p$ : 0,001187 Globalement significatif.
b) i) $\chi^2 = 3{,}372126$; point critique = 3,841459; valeur $p = 0{,}06630813$
ii) $\chi^2 = 7{,}854535$; point critique = 3,841459; valeur $p = 0{,}00506934$
iii) Somme des khi-deux : 11,22666, À 2 degrés de liberté, le point critique est 5,99,
c) Les valeurs individuelles de $\chi^2$ et les valeurs $p$ correspondantes sont

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\chi 2$ | 2,9760422 | 0,6423784 | 8,9914234 | 0,3772634 |
| Valeurs $p$ | 0,0845057 | 0,4228509 | 0,0027125 | 0,5390715 |

Globalement, $\chi^2 = 12{,}987$; valeur $p$ : 0,01134
d) i) $\chi^2 = 1.934$; point critique = 9,487729; valeur $p = 0.747818$
ii) $\chi^2 = 5{,}976347$; point critique = 9,487729; valeur $p = 0{,}2009216$
Somme des deux $\chi^2$ : 7,91; point critique à 8 dl = 15,507
e) i) $\chi^2 = 1{,}369$; valeur $p$ = 0, 2419
ii) $\chi^2 = 6{,}523$; valeur $p = 0{,}01060$
Les valeurs individuelles de $\chi^2$ et les valeurs $p$ correspondantes sont

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi 2$ | 1,3692815 | 3,2181159 | 6,5228457 | 0,4329162 | 2,7251245 |
| Valeurs $p$ | 0,2419354 | 0,0728274 | 0,0106497 | 0,5105615 | 0,0987804 |

Globalement, $\chi^2 = 14{,}26828$; valeur $p = 0{,}01399212$